Glava 1

Linearni operatori u konačnodimenionalnim vektorskim prostorima

U ovoj glavi ćemo se upoznati sa preslikavanjima jednih vektorskih prostora u druge. Takva preslikavanja ćemo nazivati operatorima. Linearna algebra se bavi operatorima koji imaju svojstvo linearnosti.

1.1 Definicija i osnovna svojstva

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{P}$.

Definicija 1.1.1. Preslikavanje $\mathscr{A} : V \to W$ se naziva linearnim operatorom ako ispunjava sljedeća dva uslova:
(i) $\mathscr{A}(x+y) = \mathscr{A}x + \mathscr{A}y$, $\forall x, y \in V$ (aditivnost) i
(ii) $\mathscr{A}(\alpha x) = \alpha \mathscr{A}x$, $\forall x \in V$ i $\forall \alpha \in \mathbb{P}$ (homogenost).

Linearne operatore ćemo uvijek označavati velikim latinskim pisanim slovima, recimo $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, itd. Sa $\mathcal{L}(V \to W)$ označavamo skup svih linearnih operatora koji preslikavaju prostor V u prostor W (kasnije ćemo vidjeti da je riječ o vektorskom prostoru nad poljem $\mathbb{P}$). Dakle, oznaka $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ znači da je $\mathscr{A}$ linearan operator iz prostora V u prostor W.

Lema 1.1.2. *$\mathscr{A} : V \to W$ je linearan operator, ako i samo ako važi*

$$\mathscr{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathscr{A}x + \beta \mathscr{A}y, \quad \forall x, y \in V \ \ i \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}.$$

Dokaz. Ako je $\mathscr{A}$ linearan operator, tada za $x, y \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ imamo

$$\mathscr{A}(\alpha x + \beta y) = \mathscr{A}(\alpha x) + \mathscr{A}(\beta y) = \alpha \mathscr{A}x + \beta \mathscr{A}y.$$

Obrnuto, ako je ispunjeno svojstvo u formulaciji leme, tada možemo postaviti $\alpha = 1$ i $\beta = 1$ kako bismo ustanovili aditivnost operatora, a potom $\alpha = 1$ i $\beta = 0$ čime zaključujemo da važi i homogenost. $\square$

Lema 1.1.3. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Tada važi $\mathscr{A}\theta_V = \theta_W$ (tj. $\mathscr{A}$ preslikava nula-vektor prostora V u nula-vektor prostora W) i $\mathscr{A}(-x) = -\mathscr{A}x$, $\forall x \in V$.*

Dokaz. Imajući u vidu svojstvo homogenosti, nalazimo $\mathscr{A}\theta_V = \mathscr{A}(0 \cdot \theta_V) = 0 \cdot \mathscr{A}\theta_V = \theta_W$ i $\mathscr{A}(-x) = \mathscr{A}((-1) \cdot x) = (-1) \cdot \mathscr{A}x = -\mathscr{A}x$. $\square$

Primjer 1.1.4. (i) Razmotrimo operator $\mathscr{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathscr{A}x = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Važi

$$\mathscr{A}(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = \mathscr{A}x + \mathscr{A}y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

i

$$\mathscr{A}(\alpha x) = 2(\alpha x) = \alpha(2x) = \alpha\mathscr{A}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ i } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dakle, možemo zaključiti da je $\mathscr{A}$ linearni operator, tj. $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$.

(ii) Razmotrimo operator $\mathscr{P}$ koji preslikava prostor $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ zadat na sljedeći način:

$$\mathscr{P}x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Za $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ je $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$ i prema tome

$$\mathscr{P}(x+y) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathscr{P}x + \mathscr{P}y.$$

Kako je $\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, imamo

$$\mathscr{P}(\alpha x) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\mathscr{P}x.$$

Ovim smo ustanovili da je $\mathscr{P}$ linearni operator.

Operator $\mathscr{P}$ se naziva operatorom projekcije.

(iii) Na prostoru geometrijskih vektora R^2 razmotrimo operator rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ suprotno kazaljci na satu. Označimo ovaj operator sa $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$. Možemo se neposredno provjeriti da je $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$ linearni operator, tj. $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$.

(iv) Neka je M_n vektorski prostor svih polinoma stepena $\leq n$ sa koeficjentima iz polja $\mathbb{R}$ i razmotrimo operator diferenciranja $\mathscr{D}$. Iz svojstava diferenciranja znamo da ovaj operator preslikava M_n u M_{n-1} i da pri tome važi

$$\mathscr{D}(p+q) = \mathscr{D}p + \mathscr{D}q, \quad \forall p, q \in M_n$$

i

$$\mathscr{D}(\alpha p) = \alpha\mathscr{D}p, \quad \forall p \in M_n \text{ i } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prema tome $\mathscr{D}$ je linearni operator iz prostora M_n u M_{n-1}, tj. $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_{n-1})$.

1.2 Jezgro i slika linearnog operatora

Jezgro operatora je skup svih vektora koji se slikaju u nula-vektor, dok je njegova slika skup svih vektora u koje se neki vektor preslikava. Ova dva pojma ćemo precizirati u definicijama koje slijede.

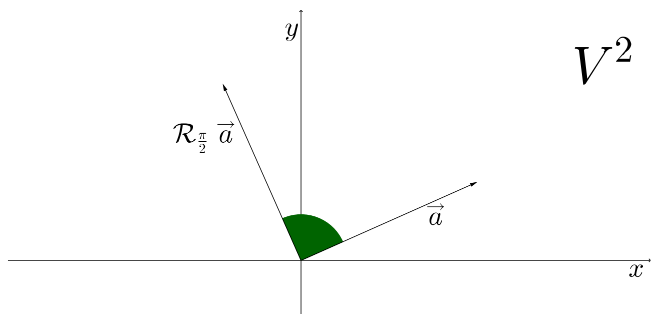
Definicija 1.2.1. Jezgro linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je skup

$$\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{u \in V : \mathscr{A} u = \theta_W\}.$$

Definicija 1.2.2. Slika linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je skup

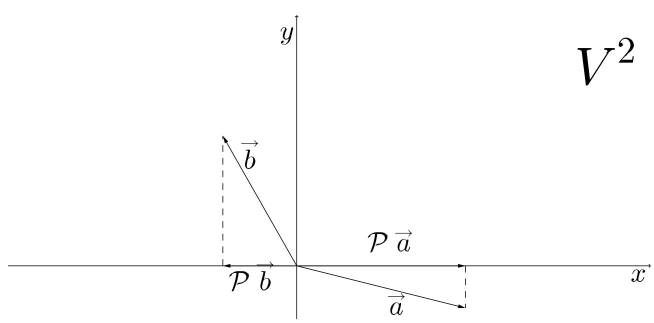
$$\operatorname{Im} \mathscr{A} = \{w \in W : \exists u \in V \ \mathscr{A} u = w\}.$$

Primjer 1.2.3. (i) Za operator rotacije u ravni za ugao $\frac{\pi}{2}$ imamo $\operatorname{Ker} \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = \{\theta\}$ i $\operatorname{Im} \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = R^2$.



Slika 1.1: Operator rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$

(ii) Razmotrimo operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ zadat sa $\mathscr{P}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lako je vidjeti da je $\operatorname{Ker} \mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}\}$ i $\operatorname{Im} \mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.



Slika 1.2: Operator projekcije na x-osu.

(iii) Jezgro operatora $\mathscr{D} \in \mathcal{L}\,(M_n \to M_{n-1})$ čine svi polinomi konstante, dok su u njegovoj slici svi polinomi stepena $\leq n-1$. Dakle, $\operatorname{Ker} \mathscr{D} = \{\text{const}\}$ i $\operatorname{Im} \mathscr{D} = M_{n-1}$.

Napomena 1.2.4. Ukoliko jezgro operatora sadrži samo nula-vektor (kao, na primjer, u slučaju operatora $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$), govorićemo da je jezgro operatora trivijalno.

Teorema 1.2.5. *(i) Jezgro linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je vektorski potprostor u V.*
(ii) Slika linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je vektorski potprostor u W.

Dokaz. (i) Neka su $u, v \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$ proizvoljni vektori i $\alpha \in \mathbb{P}$ proizvoljna skalar. Tada je $\mathscr{A}u = \mathscr{A}v = \theta_W$. Prema tome je $\mathscr{A}(u+v) = \mathscr{A}u+\mathscr{A}v = \theta_W+\theta_W = \theta_W$. Dakle, $u+v \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Takođe je $\mathscr{A}(\alpha u) = \alpha\mathscr{A}u = \alpha \cdot \theta_W = \theta_W$. Dakle, imamo $\alpha u \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Sada možemo zaključiti da je $\operatorname{Ker} \mathscr{A}$ zaista vektorski potprostor u V.

(ii) Pretpostavimo da su $w, z \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$ proizvoljni vektori i $\alpha \in \mathbb{P}$ proizvoljan skalar. Tada postoje $u, v \in V$ tako da je $\mathscr{A}u = w$ i $\mathscr{A}v = z$, pa imamo $\mathscr{A}(u+v) = \mathscr{A}u+\mathscr{A}v = w+z$. Dakle, vektor $u + v \in V$ se slika u $w + z$, tj. $w + z \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$. Primjenom svojstva homogenosti imamo $\mathscr{A}(\alpha u) = \alpha\mathscr{A}u = \alpha w$, pa se, dakle, vektor αu slika u αw, tj. $\alpha w \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$. Iz prethodnog slijedi da je $\operatorname{Im} \mathscr{A}$ zaista vektorski potprostor u W. $\square$

Teorema 1.2.6. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i neka je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ baza u prostoru V. Tada je*

$$\operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}.$$

Dokaz. Neka je $w \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$ proizvoljan vektor. Tada postoji $v \in V$ tako da je $w = \mathscr{A}v$. Ako je $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$ razlaganje vektora v po bazi u V, tada imamo

$$w = \mathscr{A}v = \mathscr{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) = \alpha_j \sum_{j=1}^{n} \mathscr{A}u_j.$$

Dakle, $w \in \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$, tj. $\operatorname{Im} \mathscr{A} \subseteq \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$.

Pokažimo sada obrnutu inkluziju. Neka je $v \in \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$. Tada je

$$v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathscr{A}u_j = \mathscr{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) \in \operatorname{Im} \mathscr{A}.$$

Dakle, $\operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\} \subseteq \operatorname{Im} \mathscr{A}$. $\square$

Primjer 1.2.7. (i) Razmotrimo operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. U $\mathbb{R}^2$ izaberimo bazu $\{u_1, u_2\}$, gdje je

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tada imamo

$$\mathscr{P}u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathscr{P}u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prema prethodnoj teoremi je

$$\operatorname{Lin}\{\mathscr{P}u_1, \mathscr{P}u_2\} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \operatorname{Im} \mathscr{P}.$$

(ii) Za operator rotacije $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ razmotrimo standardnu bazu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ u R^2. Primijetimo da je

$$\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \quad \text{i} \quad \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_2 = -\vec{e}_1,$$

pa je $\operatorname{Im} \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{Lin}\{\vec{e}_2, -\vec{e}_1\} = R^2$.

(iii) Razmotrimo standardnu bazu $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ u prostoru polinoma M_n. Kako je $\mathscr{D}1 = 0$, $\mathscr{D}t = 1$, $\mathscr{D}t^2 = 2t, \ldots, \mathscr{D}t^n = nt^{n-1}$, imamo $\operatorname{Im} \mathscr{D} = \operatorname{Lin}\{0, 1, 2t, \ldots, nt^{n-1}\} = M_{n-1}$.

Teorema 1.2.8. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ linearno zavisan sistem vektora u prostoru V. Tada je $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \dots, \mathscr{A}u_m\}$ linearno zavisan sistem u W.*

Dokaz. Neka je $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = \theta_V$, pri čemu postoji $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$. Ako na posljednju jednakost djelujemo operatorom $\mathscr{A}$, dobijamo

$$\mathscr{A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 \mathscr{A}u_1 + \alpha_2 \mathscr{A}u_2 + \cdots + \alpha_m \mathscr{A}u_m = \mathscr{A}\theta_V = \theta_W.$$

Kako je riječ o netrivijalnoj linearnoj kombinaciji, možemo zaključiti da je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \dots, \mathscr{A}u_m\}$ linearno zavisan. □

Ova teorema se može preformulisati na sledeći način.

Posljedica 1.2.9. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Ako je $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \dots, \mathscr{A}u_m\}$ linearno nezavisan sistem vektora u W, tada je $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ takođe linearno nezavisan sistem u V.*

Teorema 1.2.10. *Neka je $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baza u V, a $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ proizvoljan sistem vektora u W. Postoji jedinstven linearani operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ tako da je $\mathscr{A}v_j = w_j$, $j = \overline{1, n}$.*

Dokaz. Neka je $u \in V$ proizvoljan vektor i $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ razlaganje vektora u po bazi u V. Definišimo operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ na sljedeći način:

$$\mathscr{A}u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j.$$

Neposredno se može provjeriti da je $\mathscr{A}$ zaista linearni operator. Takođe imamo

$$\begin{aligned} \mathscr{A}v_j &= \mathscr{A}(0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_j + \cdots + 0 \cdot v_n) \\ &= 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \cdots + 1 \cdot w_j + \cdots + 0 \cdot w_n = w_j, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

Da ustanovimo jedinstvenost, pretpostavimo da i za linearni operator $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$ važi $\mathscr{B}v_j = w_j$, $j = \overline{1, n}$. Izaberimo proizvoljan vektor $u \in V$ i neka je $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$. Tada imamo

$$\mathscr{B}u = \mathscr{B}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathscr{B}v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j = \mathscr{A}u.$$

Dakle, $\mathscr{A}u = \mathscr{B}u$, $\forall u \in V$, tj. $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$. □

Definicija 1.2.11. Rangom linearnog operatora $\mathscr{A}$ nazivamo dimenziju njegove slike. Oznaka: $\operatorname{rank} \mathscr{A}$.

Definicija 1.2.12. Defektom linearnog operatora $\mathscr{A}$ nazivamo dimenziju njegovog jezgra. Oznaka: $\operatorname{defect} \mathscr{A}$.

Dakle,

$$\operatorname{rank} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} \quad \text{i} \quad \operatorname{defect} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathscr{A}.$$

Lema 1.2.13. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Tada je* $\operatorname{rank} \mathscr{A} \leq \dim V$.

Dokaz. Neka je $\dim V = n$ i neka je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ baza u prostoru V. Prema Teoremi 1.2.6 je $\operatorname{Im}\mathscr{A} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$, pa imamo

$$\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = \dim\operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\} \leq n.$$

Napomenimo da ukoliko je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$ linearno nezavisan, ovdje važi znak jednakosti, a ukoliko je taj sistem linearno zavisan, tada je $\operatorname{rank}\mathscr{A} < n$. $\square$

Teorema 1.2.14. *Za svaki operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ važi*

$$\operatorname{rank}\mathscr{A} + \operatorname{defect}\mathscr{A} = \dim V.$$

Dokaz. Neka je $\dim V = n$ i neka je $\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A} = k$. Pokazaćemo da je $\operatorname{rank}\mathscr{A} = n-k$. Izaberimo bazu $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ u potprostoru $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ i dopunimo je do baze $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ prostora V. Pokazaćemo da je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_{k+1}, \mathscr{A}u_{k+2}, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$ baza za $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Zaista, imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\mathscr{A} &= \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \ldots, \mathscr{A}u_k, \mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n\} \\ &= \operatorname{Lin}\{\theta_W, \ldots, \theta_W, \mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n\} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n\},\end{aligned}$$

što znači da sistem vektora $\{\mathscr{A}u_{k+1}, \mathscr{A}u_{k+2}, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$ generiše $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Preostaje da se pokaže da je taj sistem linearno nezavisan. Neka je $\alpha_{k+1}\mathscr{A}u_{k+1} + \alpha_{k+2}\mathscr{A}u_{k+2} + \cdots + \alpha_n\mathscr{A}u_n = \theta_W$. Ova jednakost se može napisati u obliku $\mathscr{A}\left(\sum_{j=k+1}^{n}\alpha_j u_j\right) = \theta_W$. Dakle, $\sum_{j=k+1}^{n}\alpha_j u_j \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$, što znači da se ovaj vektor može razložiti po bazi potprostora $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Neka je $\sum_{j=k+1}^{n}\alpha_j u_j = \sum_{j=1}^{k}\beta_j u_j$. Odavde imamo $\sum_{j=1}^{k}\beta_j u_j + \sum_{j=k+1}^{n}(-\alpha_j)u_j = \theta_V$. Međutim, sistem vektora $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ je baza u V, pa slijedi da svi koeficijenti prethodne linearne kombinacije moraju biti jednaki nuli. Posebno, imamo $\alpha_j = 0$ za sve $j = \overline{k+1, n}$. Dakle, pokazali smo da je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_{k+1}, \mathscr{A}u_{k+2}, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$ linearno nezavisan i prema tome baza potprostora $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Na osnovu prethodnog imamo $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = n-k$, tj. $\operatorname{rank}\mathscr{A} = n-k$. $\square$

1.3 Operacije sa linearnim operatorima

(i) Zbir operatora $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je operator $\mathscr{A} + \mathscr{B} : V \to W$ koji djeluje na sledeći način:

$$(\mathscr{A} + \mathscr{B})u = \mathscr{A}u + \mathscr{B}u, \quad \forall u \in V.$$

Lako je ustanoviti da $\mathscr{A} + \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Dakle, imamo dobro definisanu operaciju na skupu svih linearnih operatora $\mathcal{L}(V \to W)$.

(ii) Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, i neka je $\alpha \in \mathbb{P}$. Množenjem operator $\mathscr{A}$ skalarom $\alpha \in \mathbb{P}$ dobijamo operator $\alpha\mathscr{A} : V \to W$ koji dejstvuje na sljedeći način:

$$(\alpha\mathscr{A})u = \alpha(\mathscr{A}u), \quad \forall u \in V.$$

Lako je provjeriti da $\alpha\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$.

iii) Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$. Tada možemo definisati operator $\mathscr{B} \circ \mathscr{A} : V \to Z$ na sljedeći način:

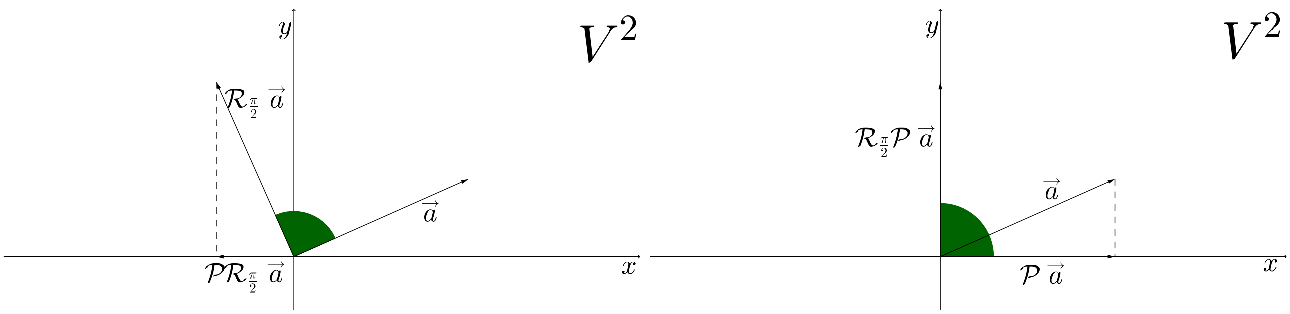
$$(\mathscr{B} \circ \mathscr{A})u = \mathscr{B}(\mathscr{A}u), \quad \forall u \in V.$$

Neposredno se može provjeriti da je $\mathscr{B}\circ\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to Z)$. Operator $\mathscr{B}\circ\mathscr{A}$ nazivamo proizvodom (ili superpozicijom) operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$. Umjesto $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}$ često ćemo pisati $\mathscr{B}\mathscr{A}$.

Teorema 1.3.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{P}$. Tada skup svih linearnih operatora $\mathcal{L}(V \to W)$ sa operacijama sabiranja i množenja operatora skalarom čini vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$.*

Za dokaz je potrebno provjeriti aksiome vektorskog prostora. Napomenimo da je neutralni element za sabiranje operatora nula-operator $O \in \mathcal{L}(V \to W)$, koji dejstvuje na način: $Ou = \theta_W$, $\forall u \in V$.

Primjer 1.3.2. Neka su $\mathscr{R}, \mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ operatori rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ i projekcije na $x-$osu. Tada je moguće razmotriti dva proizvoda: $\mathscr{R}\mathscr{P}$ i $\mathscr{P}\mathscr{R}$. Imamo $\operatorname{Ker}\mathscr{R}\mathscr{P} = y -$ osa i $\operatorname{Im}\mathscr{R}\mathscr{P} = y -$ osa. Za operator $\mathscr{P}\mathscr{R}$ je $\operatorname{Ker}\mathscr{P}\mathscr{R} = x -$ osa i $\operatorname{Im}\mathscr{P}\mathscr{R} = x -$ osa.



Slika 1.3: Dejstvo operatora $\mathscr{P}\mathscr{R}_{\pi/2}$ i $\mathscr{R}_{\pi/2}\mathscr{P}$.

Teorema 1.3.3. *Neka su $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$ linearni operatori. Tada važi:*

1. $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \min\{\operatorname{rank}\mathscr{A}, \operatorname{rank}\mathscr{B}\}$;
2. $\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim W \Rightarrow \operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{B}$;
3. $\operatorname{rank}\mathscr{B} = \dim W \Rightarrow \operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{A}$.

Dokaz. 1. Kako je $\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} \subseteq \operatorname{Im}\mathscr{B}$, imamo $\dim\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \dim\operatorname{Im}\mathscr{B}$, tj. $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \operatorname{rank}\mathscr{B}$. Dokažimo sada da je $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \operatorname{rank}\mathscr{A}$. Neka je $W' = \operatorname{Im}\mathscr{A} \subseteq W$ i razmotrimo suženje operatora $\mathscr{B}$ na potprostor W', tj. $\mathscr{B}|_{W'}$. Primijetimo da je $\operatorname{Im}\mathscr{B}|_{W'} = \operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A}$, pa imamo

$$\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \dim\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} = \dim\operatorname{Im}\mathscr{B}|_{W'} \leq \dim W' = \dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{A}.$$

2. Neka je $\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim W$. Tada je $\operatorname{Im}\mathscr{A} = W$ i $\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{Im}\mathscr{B}$, pa je $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{B}$.

3. Neka je $\operatorname{rank}\mathscr{B} = \dim W$. Tada je $\operatorname{defect}\mathscr{B} = 0$, a to znači da je operator $\mathscr{B}$ jednoznačan i prema tome preslikava linearno nezavisan sistem vektora u linearno nezavisan sistem vektora. Neka je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ baza prostora V. Odaberimo $k = \operatorname{rank}\mathscr{A}$ vektora tako da je $\{\mathscr{A}u_{i_1}, \mathscr{A}u_{i_2}, \ldots, \mathscr{A}u_{i_k}\} \subseteq W$ baza za $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Kako je slika ovog sistema linearno nezavisan sistem $\{\mathscr{B}\mathscr{A}u_{i_1}, \mathscr{B}\mathscr{A}u_{i_2}, \ldots, \mathscr{B}\mathscr{A}u_{i_k}\}$, imamo $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \geq k = \operatorname{rank}\mathscr{A}$. Kako na osnovu prvog dijela tvrđenja imamo obrnutu nejednakost, možemo zaključit da važi $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{A}$. □

Primjer 1.3.4. Uz oznake iz prethodnog primjera imamo $\operatorname{rank}\mathscr{R}\mathscr{P} = 1$, dok je $\operatorname{rank}\mathscr{P} = 1$ i $\mathscr{R} = 2$.

1.4 Obratni operator

U ovoj sekciji ćemo razmatrati operatore koji preslikavaju vektorski prostor V u sebe, dakle razmatramo operatore koji pripadaju prostoru $\mathcal{L}(V \to V)$.

Definicija 1.4.1. Operator $\mathscr{I} \in \mathcal{L}(V \to V)$, $\mathscr{I} u = u, \forall u \in V$ se naziva jediničnim operatorom ili operatorom identiteta na prostoru V.

Definicija 1.4.2. Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva invertibilnim, ako postoji $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to V)$ tako da je $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{I}$. Tada se $\mathscr{B}$ naziva obratnim operatorom operatoru $\mathscr{A}$.

Pokazaćemo jedinstvenost operatora $\mathscr{B}$ u gornjoj definiciji: ako je operator $\mathscr{A}$ invertibilan, njegov obratni operator je jedinstven. Naime, pretpostavimo da je pored $\mathscr{B}$ i operator $\mathscr{C} \in \mathcal{L}(V \to V)$ obratni za $\mathscr{A}$. Tada je

$$\mathscr{B} = \mathscr{I}\mathscr{B} = (\mathscr{C}\mathscr{A})\mathscr{B} = \mathscr{C}(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \mathscr{C}\mathscr{I} = \mathscr{C}.$$

Teorema 1.4.3. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
(1) $\mathscr{A}$ je invertibilan operator;
(2) $\mathscr{A}$ je obostrano jednoznačan operator;
(3) $\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{\theta\}$, tj. $\operatorname{defect} \mathscr{A} = 0$;
(4) $\operatorname{Im} \mathscr{A} = V$, tj. $\operatorname{rang} \mathscr{A} = \dim V$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Pretpostavimo da je $\mathscr{A}$ invertibilni operator, tj. neka postoji linearni operator $\mathscr{B}$ tako da je $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{I}$. Kako je $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{I}$, za sve $y \in V$ postoji $x \in V$ tako da je $\mathscr{A}x = y$; naime, trebamo odabrati $x = \mathscr{B}y$ i tada imamo $\mathscr{A}x = \mathscr{A}\mathscr{B}y = \mathscr{I}y = y$. Ako je $\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}x_2$, tada je $\mathscr{B}\mathscr{A}x_1 = \mathscr{B}\mathscr{A}x_2 \Rightarrow \mathscr{I}x_1 = \mathscr{I}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Dakle, operator $\mathscr{A}$ je zaista obostrano jednoznačan.

(2) $\Rightarrow$ (1): Pretpostavimo da je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ obostrano jednoznačno preslikavanje. Tada postoji inverzno preslikavanje $\mathscr{A}^{-1} : W \to V$. Kako je tada $\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{I}$, dovoljno je još pokazati da je $\mathscr{A}^{-1}$ linearan operator. Naime, zbog jedinstvenosti obratnog operatora, tada možemo zaključiti da je $\mathscr{A}^{-1}$ obratni operator za $\mathscr{A}$. Pokažimo sada linearnost za $\mathscr{A}^{-1}$. Za $x, y \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ imamo $\mathscr{A}(\alpha\mathscr{A}^{-1}x + \beta\mathscr{A}^{-1}y) = \alpha\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1}x + \beta\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1}y = \alpha x + \beta y$, pa je $\mathscr{A}^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathscr{A}^{-1}x + \beta\mathscr{A}^{-1}y$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Ako je $\mathscr{A}$ obostarno jednoznačan, svaki vektor ima samo jednu obratnu sliku, pa i vektor $\theta \in V$. Ovo znači da se samo nula-vektor slika u nula-vektor, tj. $\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{\theta\}$.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) jer je $\operatorname{defect} \mathscr{A} + \operatorname{rang} \mathscr{A} = \dim V$.

(4) $\Rightarrow$ (2): Neka je $\operatorname{Im} \mathscr{A} = V$. Tada je i $\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{\theta\}$. Trebamo pokazati da je operator $\mathscr{A}$ obostrano jednoznačan. Zbog pretpostavke o slici operatora, dovoljno je pokazati još da $\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Naime, ako je $\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}x_2$, tada imamo $\mathscr{A}(x_1 - x_2) = \theta$, tj. $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{\theta\}$, pa je $x_1 - x_2 = \theta$ ili $x_1 = x_2$. $\square$

Primjedba 1.4.4. Iz dokaza prethodne teoreme vidimo da je operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ invertibilan ako i samo ako je $\mathscr{A}$ izomorfizam vektorskog prostora V, pri čemu je obratan operator za $\mathscr{A}$ inverzno preslikavanje $\mathscr{A}^{-1}$.

Definicija 1.4.5. Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je singularan, ako je $\operatorname{Ker} \mathscr{A} \neq \{\theta\}$. Ako je $\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{\theta\}$, za operator $\mathscr{A}$ kažemo da je regularan.

Iz navedenog možemo izvesti narednu posljedicu.

Posljedica 1.4.6. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$.

$\mathscr{A}$ *singularan* $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ *nije invertibilan* $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ *nije uzajamno jednoznačan* $\Leftrightarrow \operatorname{rank} \mathscr{A} < \dim V$ $\Leftrightarrow \operatorname{defect} \mathscr{A} > 0$.

Primjer 1.4.7. (i) Za operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ rotacije geometrijske ravni za ugao $\frac{\pi}{2}$ je lako vidjeti da je $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}^{-1} = \mathscr{R}_{-\frac{\pi}{2}}$.

(ii) Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ projekcije vektora na x-osu nema obratni operator, jer nije uzajamno jednoznačan.

(iii) Kako jezgro operatora $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ nije trivijalan potprostor, operator $\mathscr{D}$ nije invertibilan.

1.5 Matrica linearnog operatora

Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i neka je $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza u V, a $w = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza u W. Vektor $\mathscr{A} v_j \in W$ možemo razložiti po bazi prostora W na **jedinstven** način, tj. imamo

$$\mathscr{A} v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad j = \overline{1, n}.$$

Definicija 1.5.1. Matricom operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ u bazama v i w nazivamo matricu

$$A(v, w) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m \times n}.$$

Isatknimo da su kolone matrice linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ koordinatne reprezentacije vektora baze prostora V u bazi prostora W i da je prema tome format matrice jednak $m \times n = \dim W \times \dim V$.

Primjer 1.5.2. Neka je dat operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ i izaberimo bazu $v = \{v_1, v_2\}$ u prostoru $\mathbb{R}^2$, gdje je $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Kako bismo našli matricu operatora u ovoj bazi, potrebno je naći slike svih vektora iz baze:

$$\mathscr{P} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{P} v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dalje, potrebno je dobijene vektore razložiti po izabranoj bazi:

$$\mathscr{P} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Odavde imamo:

$$\alpha_{11} - 4\alpha_{21} = 1,\ \alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = \frac{1}{3},\ \alpha_{21} = -\frac{1}{6}.$$

Dobijene koeficijente α_{11}, α_{21} možemo upisati u prvu kolonu matrice.

Nastavimo sada sa slikom drugog vektora u bazi:

$$\mathscr{P}v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tada je:

$$\alpha_{12} - 4\alpha_{22} = -4,\ \alpha_{12} + 2\alpha_{22} = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = -\frac{4}{3},\ \alpha_{22} = \frac{2}{3}.$$

Matrica operatora $\mathscr{P}$ u bazi v je

$$P(v) = \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Sada nađimo matricu istog operatora u standardnoj bazi $e = \{e_1, e_2\}$, gdje je $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Prije svega imamo

$$\mathscr{P}e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \quad \text{i} \quad \mathscr{P}e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2,$$

pa možemo zaključiti da je matrica operatora u bazi e:

$$P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjer 1.5.3. Nađimo matricu operatora rotacije $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ u standardnoj bazi $e = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ u $\mathbb{R}^2$.

Lako je vidjeti da je

$$\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} e_1 = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \quad \text{i} \quad \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} e_2 = -e_1 = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2,$$

pa imamo

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjer 1.5.4. Razmotrimo operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$, i izaberimo u prostoru M_n bazu $v = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Imamo

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^n; \\
&\mathscr{D}t = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^n; \\
&\mathscr{D}t^2 = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \cdots + 0 \cdot t^n; \\
&\mathscr{D}t^3 = 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + +3 \cdot t^2 + \cdots + 0 \cdot t^n \\
&\vdots \\
&\mathscr{D}t^n = nt^{n-1} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + n \cdot t^{n-1} + 0 \cdot t^n.
\end{aligned}$$

Uvrštavajući dobijene koeficijente razlaganja redom u kolone, dobićemo matricu operatora $\mathscr{D}$ u izabranoj bazi

$$D(v)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\dots&0\\0&0&2&0&\dots&0\\0&0&0&3&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\ddots&n\\0&0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}.$$

Napomenimo da je matrica $D(v)$ formata $(n+1)\times(n+1)$.

Odredimo sada matricu istog operatora u drugoj bazi $w=\{1,t,\frac{t^2}{2!},\frac{t^3}{3!},\dots,\frac{t^n}{n!}\}$. Nađimo slike vektora baze i njihova razlaganja:

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}1=0=0\cdot 1+0\cdot t+\dots+0\cdot\frac{t^n}{n!};\\&\mathscr{D}t=1=1\cdot 1+0\cdot t+\dots+0\cdot\frac{t^n}{n!};\\&\mathscr{D}\frac{t^2}{2!}=t=0\cdot 1+1\cdot t+0\cdot\frac{t^2}{2!}+\dots+0\cdot\frac{t^n}{n!};\\&\mathscr{D}\frac{t^3}{3!}=\frac{t^2}{2}=0\cdot 1+0\cdot t+1\cdot\frac{t^2}{2!}+\dots+0\cdot\frac{t^n}{n!};\\&\vdots\\&\mathscr{D}\frac{t^n}{n!}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}=0\cdot 1+0\cdot t+\dots+1\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+0\cdot\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Uvrstimo u kolone i dobijemo matricu u novoj bazi:

$$D(w)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\dots&0\\0&0&1&0&\dots&0\\0&0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\ddots&1\\0&0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}.$$

Sada smo našli način da linearne operatore zapišemo uz pomoć matrica. Ovo je važno, budući da matrice možemo jednostavno zapisati i da imamo prilično znanja o njima. Ipak, vidimo da situacija nije tako jednostavna, budući da matrica operatora zavisi od izbora baze. Kako smo vidjeli na primjeru operatora projekcije, u različitim bazama njegove matrice izgledaju potpuno različito.

Podsjetimo da prema dogovoru operatore označavamo velikim latinskim pisanim slovima. Njihove matrice ćemo označavati odgovarajućim velikim štampanim slovima. Pri tome u zagradama ćemo pisati oznaku za bazu, kako bi bilo jasno da je matrica upravo u toj bazi. Recimo, ako je $\mathscr{D}$ operator diferenciranja, sa $D(v)$ ćemo označavati matricu tog operatora u bazi v. Naglasimo da ćemo oznaku za bazu izostavljati kada je jasno u kojoj bazi radimo.

Nakon što smo zaključili da matrica operatora zavisi od izbora baze, vidjećemo da matrica operatora ipak zadržava neke osobine tog operatora, bez obzira na izbor baze. Recimo, mogli smo primijetiti da u gore navedenim primjerima matrice istog operatora uvijek imaju isti rang i da je taj rang jednak rangu operatora. Naprimjer, obije matrice operatora projekcije imaju rang 1, matrica operatora rotacije je ranga 2, dok su obije matrice operatora diferenciranja ranga n. To nas navodi da formulišemo sljedeće tvrđenje.

Teorema 1.5.5. *Rang matrice $A(v, w)$ operatora $\mathscr{A}$ ne zavisi od izbora baza v i w i jednak je rangu operatora $\mathscr{A}$.*

Dokaz. Saglasno definiciji $\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim \operatorname{Im}\mathscr{A}$, a po Teoremi 1.2.6 je

$$\operatorname{Im}\mathscr{A} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \dots, \mathscr{A}v_n\},$$

pa je dakle $\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \dots, \mathscr{A}v_n\}$. Po definiciji matrice linearnog operatora $A(v,w) = (\mathscr{A}v_1(w)\mathscr{A}v_2(w)\dots\mathscr{A}v_n(w))$, gdje je $\mathscr{A}v_j(w)$, $j = \overline{1,n}$, vektor koordinata za $\mathscr{A}v_j$ u bazi w. Kako je $\operatorname{rank} A(v,w)$ broj linearno nezavisnih kolona, tj. broj linearno nezavisnih vektora u sistemu $\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \dots, \mathscr{A}v_n\}$, imamo $\operatorname{rank} A(v,w) = \dim \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \dots, \mathscr{A}v_n\} = \operatorname{rank}\mathscr{A}$. □

Lema 1.5.6. *Neka su v i w baze u prostorima V i W, redom i $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Matrica operatora $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ je $A(v,w) + B(v,w)$, a matrica operatora $\alpha\mathscr{A}$ je $\alpha A(v,w)$.*

Dokaz. Neka je $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baza u V, a $w = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ baza u W i

$$\mathscr{A}v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad \mathscr{B}v_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} w_i, \quad j = \overline{1,n}.$$

Tada je

$$(\mathscr{A} + \mathscr{B})v_j = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) w_i, \quad (\alpha\mathscr{A})v_j = \sum_{i=1}^{m} (\alpha\alpha_{ij}) w_i, \quad j = \overline{1,n}.$$

Kako je matrica operatora jedinstvena, možemo zaključiti da je matrica operatora $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ u izabranim bazama jednaka zbiru matrica $A(v,w) + B(v,w)$, a da je matrica operatora $\alpha\mathscr{A}$ jednaka $\alpha A(v,w)$. □

Teorema 1.5.7. *Dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{L}(V \to W)$ je $\dim W \times \dim V$.*

Dokaz. Odaberimo baze v i w u prostorima V i W, redom. Tada svakom operatoru $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ odgovara tačno jedna matrica $A(v,w)$ formata $\dim W \times \dim V$. Operacije sabiranja operatora i množenja operatora brojem odgovaraju operacijama sabiranja matrica i množenja matrica brojem. Dakle, vektorski prostor svih linearnih operatora $\mathcal{L}(V \to W)$ je izomorfan prostoru matrica formata $\dim W \times \dim V$. Kako izomorfni vektorski prostori imaju iste dimenzije, slijedi da je dimenzija vektorskog $\mathcal{L}(V \to W)$ jednaka $\dim W \cdot \dim V$. □

Teorema 1.5.8. *Neka su V, W i Z vektorski prostori nad poljem $\mathbb{P}$ i v, w i z baze u tim prostorima. Neka su $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$ i $A(v,w)$ i $B(w,z)$ matrice operatora u izabranim bazama. Matrica superpozicije operatora $\mathscr{B}\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to Z)$ je proizvod matrica $B(w,z)A(v,w)$.*

Dokaz. Neka je $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza u V, $w = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza u W i $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_l\}$ baza u prostoru Z. Neka su

$$A(v,w) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m\times n} \quad \text{i} \quad B(w,z) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1l} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nl} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{n\times l}$$

matrice operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$ u izabranim bazama. Tada je

$$\mathscr{A} v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad j = \overline{1,n}, \quad \mathscr{B} w_i = \sum_{k=1}^{l} \beta_{ki} z_i, \quad i = \overline{1,m},$$

pa imamo

$$\begin{aligned} (\mathscr{B}\mathscr{A})v_j = \mathscr{B}(\mathscr{A} v_j) = \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i\right) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \mathscr{B} w_i \\ = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{l} \beta_{ki} z_k &= \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) z_k, \quad j = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Dakle, matrica linearnog operatora $\mathscr{B}\mathscr{A}$ je zaista proizvod matrica $B(w,z)A(v,w)$. □

Primjedba 1.5.9. Na osnovu prethodne teoreme može se dati novi dokaz Teoreme 1.3.3 koji se oslanja na sličnom tvrđenju o rangu proizvoda matrica.

1.6 Transformacija matrice linearnog operatora pri prelasku na novu bazu

Pošto smo se u prethodnoj sekciji ubijedili da matrica operatora zavisi od izbora baze, vidjeli smo i to da ipak ne može bilo koja matrica biti matricom datog operatora. Matrice zadržavaju neka svojstva operatora, nezavisno od baze, recimo jedna takva invarijana je rang.

U ovoj sekciji ćemo se baviti pitanjem kako se mijenja matrica operatora prilikom zamjene baze. Počnimo od slučaja kada se osnovni prostor i prostor slika razlikuju, tj. kada je $\dim V \neq \dim W$, a kasnije ćemo razmotriti slučaj kada je $V = W$.

Lema 1.6.1. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i neka je $A(v,w)$ matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazama $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i $w = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ prostora V i W. Neka je $x \in V$ i neka je $x(v) \in \mathbb{P}^{n\times 1}$ koordinatna reprezentacija vektora x u bazi v. Tada za koordinatnu reprezentaciju vektora $y = \mathscr{A} x \in W$ u bazi w važi $y(w) = A(v,w)x(v) \in \mathbb{P}^{m\times 1}$.*

Dokaz. Ako je $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ razlaganje vektora x po bazi v, tada je $x(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{n\times 1}$.

Neka je $A(v,w) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m\times n}$ matrica linearnog operatora $\mathscr{A}$ u bazama v i w. Tada vektor $\mathscr{A}v_j \in W$ možemo razložiti po bazi prostora W:

$$\mathscr{A}v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad j = \overline{1,n}.$$

Sada imamo

$$y = \mathscr{A}x = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathscr{A}v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) w_i.$$

Dakle,

$$y(w) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A(v,w)x(v).$$

□

Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, v i v' baze u V, w i w' baze u W, a $A(v,w)$ i $A(v',w')$ su matrice operatora $\mathscr{A}$ u izabranim bazama.

Teorema 1.6.2. *Neka je $S \in \mathbb{P}^{n\times n}$ matrica prelaska iz baze v u v' i $Q \in \mathbb{P}^{m\times m}$ matrica prelaska iz w u w'. Tada je*

$$A(v,w)S = QA(v',w').$$

Dokaz. Neka je $x \in V$ i $y = \mathscr{A}x \in W$. Označimo sa $x(v)$ i $y(w)$ koordinate vektora x i y u bazama v i w, redom. Tada je

$$y(w) = A(v,w)x(v), \quad y(w') = A(v',v')x(v'). \tag{1.1}$$

Kako su S i Q matrice prelaska, imamo

$$x(v) = Sx(v'), \quad y(w) = Qy(w'). \tag{1.2}$$

Kombinujući (1.1) i (1.2), dobijamo:

$$Qy(w') = A(v,w)Sx(v').$$

Ako u posljednju jednakost uvrstimo drugu jednakost iz (1.1), nalazimo

$$QA(v',w')x(v') = A(v,w)Sx(v').$$

Kako je vektor x proizvoljan, iz posljednje jednakosti imamo

$$QA(v',w') = A(v,w)S,$$

a to je bilo potrebno da se pokaže. □

Teorema 1.6.3. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ *i* $\operatorname{rank} \mathscr{A} = r$. *Tada postoje baze* v *u* V *i* w *u* W, *tako da je*

$$A(v, w) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = G.$$

Dokaz. Neka je $A(v', w')$ matrica linearnog operatora $\mathscr{A}$ u nekim bazama v' i w'. Postoje regularne matrice P i Q takve da je:

$$A(v, w) = PGQ. \tag{1.3}$$

Izaberimo nove baze na sljedeći način: $v = v'Q^{-1}$ i $w = w'P$. Tada je

$$A(v, w)Q = P^{-1}A(v', w').$$

Ako uvrstimo posljednju jednakost u (1.3) proizilazi

$$A(v, w) = P^{-1}A(v', w')Q^{-1} = P^{-1}PGQQ^{-1} = G.$$

□

Posljedica 1.6.4. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. *Tada su sve matrice operatora* $\mathscr{A}$ *međusobno ekvivalentne i njihov rang je jednak rangu operatora* $\mathscr{A}$.

Sada razmotrimo slučaj kada operator djeluje iz prostora V u sebe. U tom slučaju nemamo slobodu izbora dvije baze, već samo jedne.

Teorema 1.6.5. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, *neka su* v *i* v' *dvije baza u* V *i* S *matrica prelaska, tj.* $v' = v \cdot S$. *Tada je*

$$A(v') = S^{-1}A(v)S.$$

Dokaz. Neka je x proizvoljan vektor iz V i $y = \mathscr{A}x \in V$. Tada je

$$y(v) = A(v)x(v), \quad y(v') = A(v')x(v'),$$

a takođe je $x(v) = Sx(v')$ i $y(v) = Sy(v')$. Kombinujući prethodne jednakosti dobijamo:

$$S^{-1}A(v)Sx(v') = A(v')x(v').$$

Kako je $x \in V$ proizvoljan vektor, iz posljednje jednakosti slijedi $S^{-1}A(v)S = A(v')$, a to je tvrđenje naše teoreme. □

Definicija 1.6.6. Matrice P i Q formata $n \times n$ su slične, ako postoji regularna matrica $S \in \mathbb{P}^{n \times n}$ takva da je $P = S^{-1}QS$.

Posljedica 1.6.7. *Matrice operatora* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ *u različitim bazama su međusobno slične.*

Teorema 1.6.8. *(i) Ako su matrice* A *i* A' *slične, tada važi* $\det A' = \det A$.

(ii) Važi $\det(A - tI) = \det(A' - tI)$, $\forall t \in \mathbb{P}$ *(I je jedinična matrica).*

Proof. Kako je $\det A' = \det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det A$ imamo prvi dio tvrđenja. Iz jednakosti $A' = S^{-1}AS$ slijedi da za sve skalare $t \in \mathbb{P}$ imamo $A' - tI = S^{-1}(A - tI)S$, pa drugi dio našeg tvrđenja slijedi iz prvog dijela. □

Definicija 1.6.9. Determinantom linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva $\det A(e)$.
Oznaka: $\det \mathscr{A}$ označava determinantu operatora $\mathscr{A}$.

Imajući u vidu prethodno tvrđenje, definicija koju smo upravo naveli je korektna, jer, saglasno svojstvima sličnih matrica, determinanta matrice operatora ne zavisi od izbora baze. Dakle, nije važno koja konkretno baza je izabrana u prethodnoj definiciji.

Konačno, zaključujemo da je, i pored određenih nijansi, situacija sa operatorima iz V u V analogna situaciji sa kvadratnim matricama. Između ostalog, uz zaključak na kraju Sekcije 4.4 možemo dodati i sljedeće:

Napomena 1.6.10. Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada je $\det \mathscr{A} = 0$ ako i samo ako je operator $\mathscr{A}$ singularan.

Primjer 1.6.11. Operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ je regularan ($\det \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = 1$), dok je operator $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ singularan.

Zadatak 1.6.12. Vratimo se na primjer operatora projekcije $\mathscr{P}$ iz prethodne sekcije koji je singularan. Provjeriti da za matrice

$$P(v) = \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

važi da je $P(v) = S^{-1}P(e)S$, gdje je S matrica prelaska iz baze v u standardnu bazu e u $\mathbb{R}^2$.